פתרון בגרויות במתמטיקה לשאלון 581

פרק 4

פתרון בוידאו של בחינות 2020

בגרות חורף 2020:

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) המרחק בין עיר א׳ ובין עיר ב׳ הוא 96 ק״מ.
מכונית ומשאית יצאו באותו הזמן מעיר א׳ ונסעו לכיוון עיר ב׳.
בתחילה נסעה המכונית במהירות קבועה של v_1 קמ״ש.
לאחר שעברה 15 ק״מ מן הדרך, היא עצרה בצד הדרך למשך חצי שעה, לצורך תיקון תקלה. לאחר שתוקנה התקלה, המשיכה המכונית בדרכה במהירות קבועה של 90 קמ״ש. המשאית נסעה כל הדרך במהירות קבועה של v_2 קמ״ש.
היא חלפה על פני המכונית 3 דקות לאחר שהמכונית עצרה בצד הדרך.
המכונית והמשאית הגיעו לעיר ב׳ באותו הזמן.

א. מצא את v_1 ואת v_2.

ב. כמה זמן אחרי שהמכונית והמשאית יצאו לדרך היה המרחק ביניהן 3 ק״מ? (מצא שניים משלושת המקרים).

2) a_n היא סדרה חשבונית.
k ו- p הם מספרים טבעיים. $k<p$.
נתון: $a_k=p$, $a_p=k$.

א. (1) הוכח שהפרש הסדרה a_n הוא -1.
(2) הבע את a_1 באמצעות k ו- p.

הסדרה c_n מוגדרת כך: $c_n=a_n-n$.
נתון כי סכום 6 האיברים הראשונים בסדרה c_n הוא 0.

ב. (1) מצא את a_1.
(2) מה הם ערכי k ו- p ? מצא את כל האפשרויות.

ג. חשב את הסכום: $(c_1-c_2)^2+(c_3-c_4)^2+...+(c_{99}-c_{100})^2$. נמק.

3) בקופסה יש 12 כדורים. רובם כחולים והשאר אדומים.
הוציאו באקראי כדור מן הקופסה, החזירו אותו לקופסה, ושוב הוציאו באקראי כדור והחזירו אותו. ההסתברות ששני הכדורים שהוציאו היו בצבעים שונים היא $\frac{4}{9}$.

א. מצא כמה כדורים כחולים יש בקופסה.

ב. הוסיפו לקופסה כדורים צהובים.
לאחר ההוספה הוציאו באקראי כדור, החזירו אותו, ושוב הוציאו באקראי כדור והחזירו אותו. ההסתברות שהוציאו שני כדורים בצבעים שונים נשארה $\frac{4}{9}$.
כמה כדורים צהובים הוסיפו לקופסה?

העבירו את כל הכדורים הצהובים לכלי אחר והשאירו בקופסה רק את הכדורים הכחולים והאדומים.

א. הוציאו באקראי מן הקופסה כדור אחרי כדור שוב ושוב (ללא החזרה), עד שהוציאו כדור אדום. מהי ההסתברות שמספר ההוצאות היה גדול מ-3?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) AD ו-CE הם חוצי זווית במשולש ABC, ונקודת החיתוך שלהם היא F.
נתון: $\sphericalangle ABC = 60^\circ$.

א. הוכח כי אפשר לחסום את המרובע BDFE במעגל.

נתון: FB הוא קוטר במעגל החוסם את המרובע BDFE.

ב. הוכח שהמשולש ABC הוא משולש שווה צלעות.

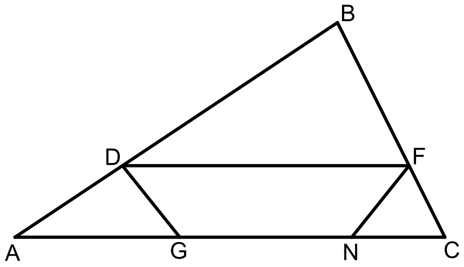
המשך הקטע BF חותך את הצלע AC בנקודה G.

ג. הוכח כי הקטע FG שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המרובע BDFE.

בנקודה F מעבירים משיק למעגל החוסם את המרובע BDFE.
המשיק חותך את הצלעות BA ו-BC בנקודות K ו-L בהתאמה.

ד. מצא את היחס $\frac{KL}{AC}$. נמק את תשובתך.

5) במשולש ABC הנקודות D ו-F נמצאות על הצלעות BA ו-BC בהתאמה כך ש- $DF \parallel AC$. הנקודות G ו-N נמצאות על הצלע AC כך שהמרובע DFNG הוא טרפז שווה שוקיים, כמתואר בציור.



נסמן : $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle FNC = \beta$.

נתון : $AD = 7$, $FC = 4$, $\sphericalangle FCN = 2\alpha$.

א. (1) הראה כי : $\frac{FN}{\sin\alpha} = \frac{AD}{\sin\beta}$.

(2) חשב את α .

נתון : שטח המשולש BDF הוא 56.

ב. מצא את אורך הקטע DF.

ג. מהו היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש FCN ובין רדיוס המעגל החוסם את המשולש DAG? נמק.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{6}{2\cos^2 x - 5\cos x - 3}$ בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

ענה על הסעיפים א-ג בעבור התחום הנתון.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה : $h(x) = \left| f(x) + 2 \right|$, שתחום ההגדרה שלה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.

(2) k הוא פרמטר. מצא את כל הערכים של k שבעבורם הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה $h(x)$ בארבע נקודות שונות.

נתונה הפונקציה : $g(x) = \left| f(x) \right| + 2$, שתחום ההגדרה של זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ג. האם לכל x בתחום ההגדרה $h(x) < g(x)$? נמק.

7) נתונה הפונקציה: $f\left(x\right)=\dfrac{3x}{4x^2-1}$ שתחום הגדרתה הוא $x\neq\pm\dfrac{1}{2}$.

א. (1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f\left(x\right)$ (אם יש כאלה).

(2) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f\left(x\right)$.

נתונה הפונקציה: $g\left(x\right)=\sqrt{\dfrac{3x}{4x^2-1}}$.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g\left(x\right)$?

(2) מה הן משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $g\left(x\right)$ המאונכות לצירים?

נתון כי לפונקציה $g\left(x\right)$ יש בדיוק נקודת פיתול אחת. שיעור ה- x של נקודה זו קטן מאפס.

ג. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g\left(x\right)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת, $g'\left(x\right)$.

ד. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $h\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{3x}}{\sqrt{4x^2-1}}$?

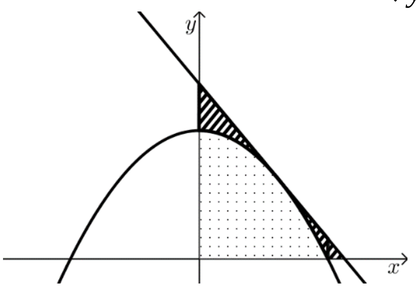
8) נתונה הפונקציה: $f\left(x\right)=-x^2+1$.

t הוא פרמטר. נתון: $0<t<1$.

בנקודה שבה $x=t$ העבירו משיק לגרף הפונקציה $f\left(x\right)$ (ראה ציור).

א. הראה כי משוואת המשיק היא: $y=-2tx+t^2+1$.

נסמן ב- S את השטח המקווקו בציור (השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f\left(x\right)$, על ידי המשיק ועל ידי הצירים).



ב. מצא בעבור איזה ערך של t השטח S הוא מינימלי. תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

נסמן ב- A את השטח המנוקד (השטח ברביע הראשון המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f\left(x\right)$ ועל ידי הצירים).

קבע בעבור כל אחת משתי הטענות שלפניך (1-2) אם היא נכונה או לא נכונה.

נמק את תשובתך.

(1) קיים ערך של t שבעבורו $\dfrac{A}{S}$ הוא מקסימלי.

(2) קיים ערך של t שבעבורו $\dfrac{A}{S}$ הוא מינימלי.

תשובות סופיות:

1) א. $v_1 =$ 75 קמ"ש , v_2 60 קמ"ש   ב. 12 דקות או 18 דקות או 90 דקות.

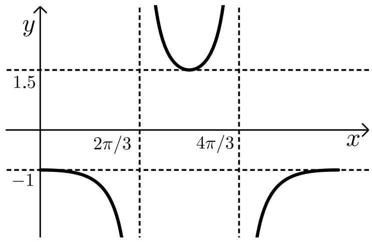
2) א. (1) הוכחה. א. (2) $a_1 = p+k-1$ ב. (1) $a_1 = 6$
ב. (2) $k=3$, $p=4$ או $k=1$, $p=6$ ג. 200.

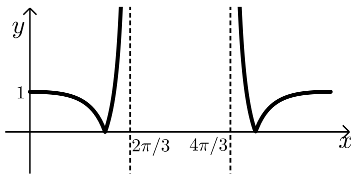
3) א. 8   ב. 30   ג. $\frac{14}{55}$.

4) א. הוכחה.   ב. הוכחה.   ג. הוכחה.   ד. $\frac{2}{3}$.

5) א. (1) הוכחה. א. (2) $\alpha = 28.955°$ ב. $DF = 16.51$ ג. $\frac{4}{7}$.

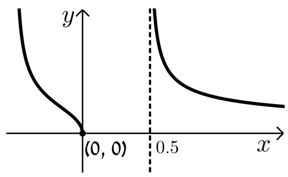
6) א. (1) $\frac{4\pi}{3} < x \le 2\pi$, $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}$, $0 \le x < \frac{2\pi}{3}$
א. (2) $\max(2\pi,-1)$, $\min(\pi,1.5)$, $\max(0,-1)$
א. (3) להלן סקיצה: ב. (1) להלן סקיצה:

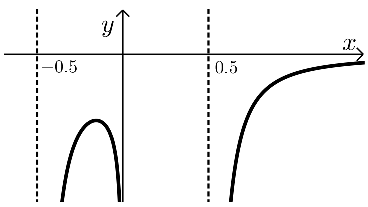




ב. (2) $k > 3.5$ או $0 < k \le 1$.
ג. לא.

7) א. (1) עלייה: אין, ירידה: $x > \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, $x < -\frac{1}{2}$.
א. (2) חיוביות: $x > \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < x < 0$, שליליות: $0 < x < \frac{1}{2}$, $x < -\frac{1}{2}$.
ב. (1) $x > \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < x \le 0$ ב. (2) $x = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$, $y = 0$.
ג. (1) להלן סקיצה: ג. (2) להלן סקיצה: ד. $x > \frac{1}{2}$.





8) א. הוכחה.
ב. $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$
ג. (1) נכון.   (2) לא נכון.

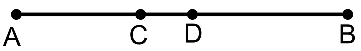
בגרות קיץ 2020 מועד א':

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על <u>שתיים</u> מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) רויטל מתאמנת ברכיבה על אופניים, וזיוה מתאמנת בהליכה ובריצה.
שתיהן יצאו באותו הזמן מן הנקודה A לכיוון הנקודה B.
רויטל רכבה במהירות קבועה, וזיוה הלכה במהירות קבועה.
רויטל הגיעה לנקודה B כאשר זיוה הגיעה לנקודה C,
הנמצאת בין הנקודה A לנקודה B כך ש- $\frac{AC}{AB}=\frac{3}{8}$.



א. מהו היחס בין מהירות ההליכה של זיוה למהירות הרכיבה של רויטל? נמק.

מייד לאחר מכן המשיכה זיוה ללכת מהנקודה C לכיוון הנקודה B במהירות ההתחלתית שלה, ואילו רויטל חזרה ברכיבה מהנקודה B לכיוון הנקודה A במהירות שגבוהה ב-3 קמ"ש ממהירותה ההתחלתית. רויטל וזיוה נפגשו בנקודה D, הנמצאת בין הנקודה C לנקודה B (ראה איור). נתון: $\frac{CD}{DB}=\frac{6}{19}$.

ב. חשב את המהירות ההתחלתית של רויטל, ואת המהירות ההתחלתית של זיוה.

מייד אחרי שרויטל וזיוה נפגשו בנקודה D, הן יצאו לכיוון הנקודה A:
רויטל המשיכה לרכוב באותה המהירות שבה רכבה לכיוון הנקודה A,
ואילו זיוה הגבירה את מהירותה ב- k קמ"ש (k הוא מספר חיובי).
רויטל הגיעה אל הנקודה A לפני שזיוה הספיקה לעבור את מחצית הדרך מ-D ל-A.

ג. מהו תחום הערכים האפשריים בעבור k? נמק.

2) a_n היא סדרה הנדסית בעלת n איברים שהמנה שלה היא q.
כל האיברים בסדרה a_n הם מספרים טבעיים.
נתון: סכום $n-4$ האיברים הראשונים של הסדרה קטן פי 16 מסכום איברי הסדרה החל באיבר החמישי (כולל).

א. (1) הבע את סכום איברי הסדרה a_n החל באיבר החמישי (כולל) באמצעות a_5, q ו- n.
(2) מצא את מנת הסדרה.

נגדיר סדרה חדשה, b_k, בת $n-2$ איברים, שבה מתקיים: $b_k=a_k+a_{k+1}+a_{k+2}$
לכל $k\le n-2$.

ב. (1) הוכח שהסדרה b_k היא סדרה הנדסית.

(2) הוכח כי כל אחד מאיברי הסדרה b_k מתחלק ב-7 ללא שארית.

ג. c_n היא סדרה הנדסית אין-סופית שבה $c_1 = \frac{1}{b_1}$ ו- $c_2 = \frac{1}{b_2}$.

סכום הסדרה c_n שווה ל- $\frac{1}{91}$. חשב את a_1.

3) בכד יש 11 כדורים, הממוספרים בסדר עולה מ-1 עד 11.
מוציאים באקראי כדור מן הכד ורושמים את המספר שעל הכדור.
אם המספר שעל הכדור הוא אי-זוגי, מחזירים אותו לכד, ואם הוא זוגי, לא מחזירים אותו. לאחר מכן שוב מוציאים באקראי כדור מן הכד ורושמים את המספר שעליו.

א. מהי ההסתברות שנרשמו שני מספרים שמכפלתם זוגית?

ב. ידוע שהמכפלה של שני המספרים שנרשמו היא זוגית.
מצא את ההסתברות שהמספר שעל הכדור הראשון שהוציאו הוא אי-זוגי.

בכד אחר יש מספר זוגי של כדורים הממוספרים בסדר עולה (1, 2, 3 ...).
מוציאים באקראי כדור מן הכד ורושמים את המספר שעל הכדור, מחזירים אותו לכד, ולאחר מכן שוב מוציאים באקראי כדור מן הכד ורושמים את המספר שעליו.

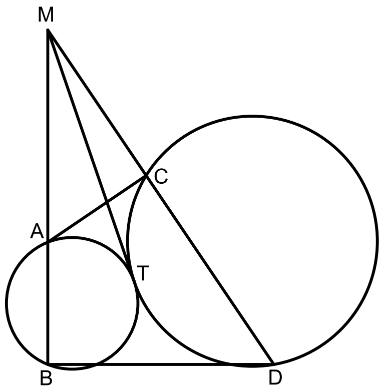
ג. (1) מצא את ההסתברות שמכפלת שני המספרים שנרשמו היא זוגית.

(2) מוציאים מן הכד k כדורים. בכל פעם שמוציאים כדור, רושמים את המספר שעליו ומחזירים אותו לכד.
הבע באמצעות k את ההסתברות שמכפלת כל המספרים שנרשמו היא זוגית.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4) נתונים שני מעגלים, המשיקים זה לזה מבחוץ בנקודה T.
דרך הנקודה T העבירו משיק המשותף לשני המעגלים.
מן הנקודה M שעל המשיק העבירו שני ישרים החותכים את המעגלים בנקודות A, B, C ו-D, כמתואר בציור.

א. (1) הוכח: $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

(2) הוכח כי המרובע ABDC הוא בר חסימה במעגל.

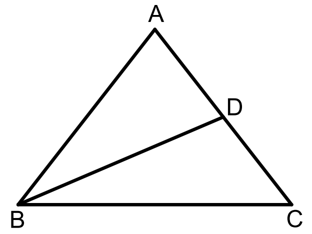
נתון: שטח המשולש MAC שווה לשטח המרובע ABDC.

ב. מצא את היחס $\frac{BD}{AC}$.

נתון: אלכסוני המרובע ABDC מאונכים זה לזה,
AD הוא קוטר במעגל החוסם את המרובע ABDC.

ג. הוכח כי המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים.

5) ABC הוא משולש שווה שוקיים שבו $AB = AC = a$ (ראה ציור).
BD הוא תיכון במשולש ABC. נתון: $BD = a$.
הנקודה M היא מפגש התיכונים במשולש ABC.



א. הבע את BC באמצעות a.

ב. חשב את זוויות המשולש BMC.

ג. נתון: $AM = 6$.
חשב את שטח המשולש ABC.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על <u>שתיים</u> מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונה הפונקציה: $f(x) = \dfrac{\sqrt{(x+1)(x-a)}}{x-2}$. $a > 2$ הוא פרמטר.
ענה על סעיף א. הבא באמצעות a אם צריך.

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

(2) מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים?

(3) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

נתון: $f(a+2) = -f(2-a)$.

ב. מצא את a.

הצב $a = 5$ וענה על הסעיפים ג-ד.

ג. (1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

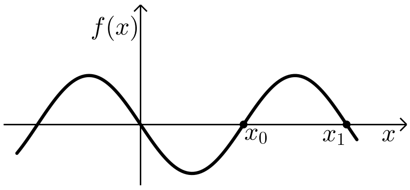
(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x+2)$.

7) לפניך חלק מן הגרף של הפונקציה המחזורית $f(x)$.

גרף הפונקציה $f(x)$ עובר בראשית הצירים, וחותך את ציר ה-x גם בנקודות שבהן $x=x_0$ ו-$x=x_1$ כמתואר בציור.

אחת המשוואות שלפניך (I-IV) מתארת את הפונקציה $f(x)$. $a \neq 0$ הוא פרמטר.



I. $y=a^2\sin x$.

II. $y=a\sin 2x$.

III. $y=a^2\cos x$.

IV. $y=a\cos 2x$.

א. (1) קבע איזו מן המשוואות I-IV היא משוואת הפונקציה $f(x)$. נמק.

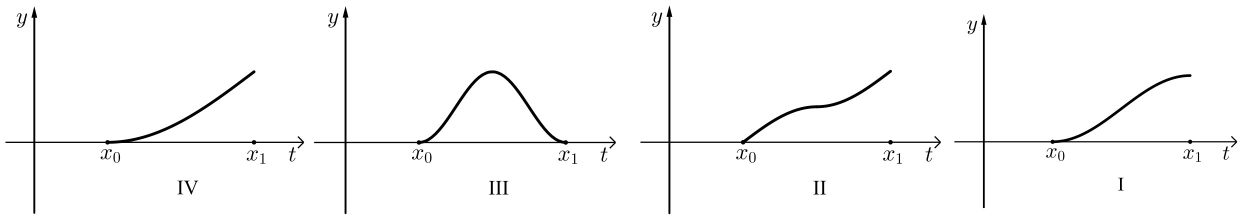
(2) קבע מהו תחום הערכים אפשריים עבור הפרמטר a. נמק.

(3) מה הם הערכים של x_0 ו-x_1?

ב. הבע באמצעות a את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה-x בתחום $x_0 \le x \le x_1$.

נסמן: $S(t)=\int_{x_0}^{t} f(x)dx$. נתון: $x_0 \le t \le x_1$.

ג. לפניך ארבעה גרפים (I-IV). איזה מן הגרפים I-IV מתאר את הפונקציה $S(t)$? נמק.



8) נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{x^4+2x^3-21x^2-22x+40}{x+2}$.

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

(2) האם לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אנכית? נמק.

נתונה הפונקציה: $g(x)=x^3-21x+20$.

ב. (1) עבור אילו ערכים של x $f(x)=g(x)$? נמק.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-x הן: $(4,0)$, $(1,0)$ ו-$(-5,0)$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. $t>0$ הוא פרמטר. עבור איזה ערך של t הביטוי $\int_0^t f(x)dx$ מקבל ערך מינימלי?

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{3}{8}$ ב. זיווה: 6 קמ"ש, רויטל: 16 קמ"ש. ג. $0<k<3.5$.

2) א. (1) $S^{*}_{n-4}=\frac{a_5\left(q^{n-4}-1\right)}{q-1}$ א. (2) $q=2$ ב. הוכחות. ג. $a_1=26$.

3) א. $\frac{85}{121}$ ב. $\frac{6}{17}$ ג. (1) $\frac{3}{4}$ ג. (2) $1-\left(\frac{1}{2}\right)^k$.

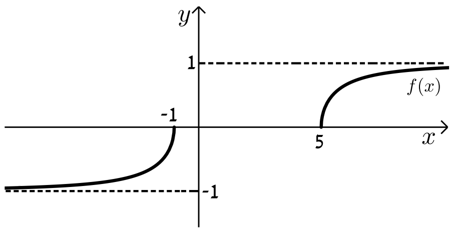
4) א. הוכחות. ב. $\sqrt{2}$ ג. הוכחה.

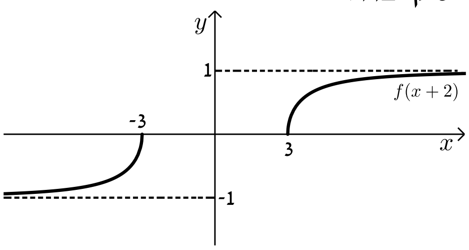
5) א. $\mathrm{BC}=a\sqrt{1.5}=1.224a$ ב. 133.44° , 23.28° , 23.28° ג. $S_{\mathrm{ABC}}=\frac{81\sqrt{15}}{5}=62.74$.

6) א. (1) $x\le-1$, $x\ge a$ א. (2) $(-1,0)$, $(a,0)$ א. (3) $y=-1$, $y=1$

ב. $a=5$ ג. (1) עולה: $x>5$, $x<-1$, אין תחומי ירידה.

ג. (2) להלן סקיצה: ד. להלן סקיצה:



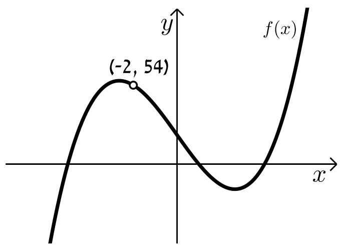


7) א. (1) II. א. (2) $a<0$ א. (3) $x_1=\pi$, $x_0=\frac{\pi}{2}$ ב. $-a$ ג. גרף I.

8) א. (1) $x\neq-2$ א. (2) לא. ב. (1) $x\neq-2$

ב. (2) $\max\left(-\sqrt{7},57.04\right)$, $\min\left(\sqrt{7},-17.04\right)$

ג. להלן סקיצה: ד. $t=4$.



בגרות קיץ 2020 מועד ב':

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על <u>שתיים</u> מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) טל ואלון הם ספורטאים המשתתפים בתחרות טריאתלון.
התחרות מורכבת משלושה מקצים רצופים: המקצה הראשון הוא שחייה, המקצה השני הוא רכיבה על אופניים ואורכו 180 קילומטרים, והמקצה השלישי הוא ריצה ואורכו 42 קילומטרים. בפתרון השאלה, הנח שמהירות השחייה, מהירות הרכיבה ומהירות הריצה של כל אחד מן הספורטאים, טל ואלון, הן קבועות לאורך כל אחד מן המקצים.

נתון:
טל התחיל את מקצה הריצה בשעה 13:30 ואלון התחיל את מקצה הריצה בשעה 15:00. טל הגיע לקו הסיום של הטריאתלון חצי שעה לפני אלון.
מהירות הריצה של אלון גדולה ב-1 קמ"ש ממהירות הריצה של טל.

א. באיזו שעה סיים אלון את מקצה הריצה?

באותו היום התחיל אלון את מקצה השחייה בשעה 6:00 וסיים אותו לפני השעה 10:00.

ב. לפניך שני היגדים I-II. קבע בנוגע לכל אחד מהם אם הוא אפשרי או אינו אפשרי.
I. מהירות הרכיבה על אופניים של אלון היא 18 קמ"ש.
II. מהירות הרכיבה על אופניים של אלון היא 25 קמ"ש.

2) בסדרה a_n נתון כי לכל n טבעי, סכום n האיברים הראשונים של הסדרה $S_n = 2\cdot 3^n - 2$.

א. (1) מצא את a_1 ואת האיבר הכללי של הסדרה a_n בעבור $n>1$.
(2) הראה כי a_n היא סדרה הנדסית, ומצא את המנה שלה.

נתונה הסדרה: $c_n = S_{n+1} - S_n$.

ב. (1) הראה כי הסדרה c_n היא סדרה הנדסית.
(2) הראה כי לכל k טבעי הסכום של k האיברים הראשונים בסדרה c_n גדול פי 3 מן הסכום של k האיברים הראשונים בסדרה a_n.

3) יעדי טיסות של חברת תעופה מסוימת הם היבשות: אירופה, אמריקה ואסיה בלבד (אין טיסות ללא נוסעים). נתון כי מבין הנוסעים בחברה, מספר הנוסעים לאמריקה הוא $\frac{3}{5}$ ממספר הנוסעים לאירופה. בוחרים באקראי נוסע מבין הנוסעים בחברה. נסמן ב- p את ההסתברות שנוסע זה טס לאירופה. בוחרים באקראי 2 נוסעים מבין הנוסעים בחברה. נתון כי ההסתברות ש-2 הנוסעים שנבחרו אינם טסים לאותה היבשת היא 0.62. נתון: $p > 0.4$.

א. מצא את p.

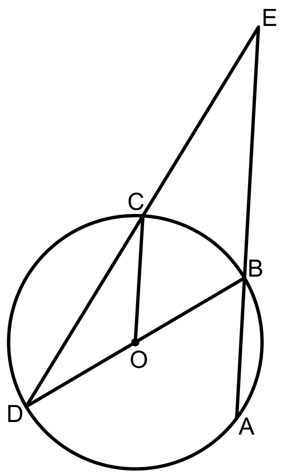
ב. בוחרים באקראי 5 נוסעים מבין הנוסעים בחברה.
מהי ההסתברות שלפחות 2 מן הנוסעים שנבחרו טסים לאמריקה וגם לפחות 2 מהם אינם טסים לאמריקה?

ג. באוטובוס לנמל התעופה היו 50 נוסעים שטסים בחברה זו.
התפלגות יעדי הטיסה של הנוסעים באוטובוס זהה להתפלגות יעדי הטיסה של כל הנוסעים בחברת התעופה. בחרו באקראי 2 נוסעים מן האוטובוס זה אחר זה (ללא החזרה), והתברר ששניהם טסים לאותה היבשת.
מהי ההסתברות ש-2 הנוסעים שנבחרו טסים לאמריקה?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4) AB הוא מיתר במעגל שמרכזו O.
הרדיוס OC מקביל למיתר AB, כמתואר בציור.
BD הוא קוטר במעגל.
הנקודה E היא מפגש הישרים AB ו-DC (ראה ציור).

א. הוכח: $\sphericalangle AED = \sphericalangle CDO$.

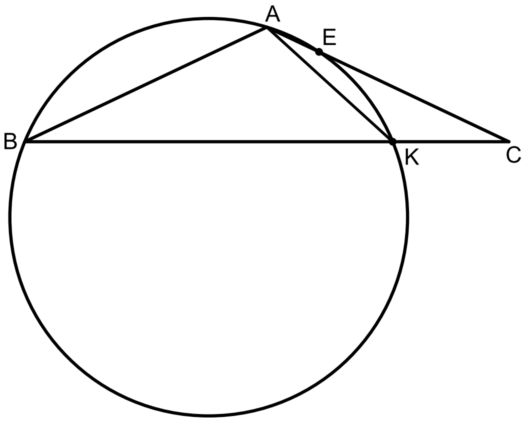
ב. הוכח כי CO חוצה את הזווית DCA.

נתון: $\frac{EB}{BA} = 2$.

ג. הוכח כי המשולש ABO הוא שווה צלעות.

ד. נתון: שטח הטרפז COBE הוא 9.
מצא את סכום שטחים המשולשים COD ו-ABO $\left(S_{\Delta COD} + S_{\Delta ABO}\right)$.

5) ABC הוא משולש שווה שוקיים (AB = AC) ששניים מקודקודיו, A ו-B, נמצאים על מעגל שרדיוסו r, כמתואר בציור.
המעגל חותך את הצלעות AC ו-BC בנקודות E ו-K בהתאמה.
נסמן: $\sphericalangle BAK = \alpha$, $\sphericalangle KAC = \beta$.



א. (1) הראה כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש AKC שווה ל- r.

(2) הוכח: $\frac{\text{BK}}{\text{KC}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

ידוע: $\sphericalangle ABK > \beta$, נתון: $\alpha + \beta = 120°$.

ב. הראה כי α היא זווית קהה.

נתון: AK = 28, BK = 55.

ג. חשב את α ואת אורך הקטע BC.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונה הפונקציה: $f(x) = (x+3)^4(2-x)$ המוגדרת לכל x.

א. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x-3)}$.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

(2) האם הפונקציה $g(x)$ חותכת את הצירים, ואם כן, באילו נקודות? נמק את תשובתך.

(3) מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$?

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. (1) הראה כי: $f(x) \geq 48$ לכל $-1 \leq x \leq 1$.

(2) הסבר מדוע $\int_2^4 g(x) \leq \frac{1}{24}$.

7) נתונה הפונקציה : $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-a}}{x^2}$.$a\neq 0$ הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. אם צריך, הבע את תשובותיך באמצעות a, והבחן בין $a>0$ ובין $a<0$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) הראה שהפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.

(4) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(5) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בעבור $a>0$
וסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בעבור $a<0$.
בעבור כל גרף שסרטטת כתוב את התחום המתאים של הפרמטר a .

ג. מצא בעבור אילו ערכים של הפרמטר a גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את הישר $y=1$ או משיק לו.

8) המשולש ABC חסום במעגל.
נתון : $AB=1$,$AC=2$.
נסמן : $\sphericalangle BAC=x$.

א. (1) הראה כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC שווה ל- $\frac{\sqrt{5-4\cos x}}{2\sin x}$.

(2) מצא את הערך של x שבעבורו רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא מינימלי.

ב. מצא את קוטר המעגל בעבור ערך ה- x שמצאת בסעיף א (2).

תשובות סופיות:

1) א. 21:00   ב. I. אינו אפשרי.   ב. II. אפשרי.

2) א. (1) $a_1=4$, $a_n=4\cdot 3^{n-1}$ א. (2) $q=3$ ב. (1) $\frac{c_{n+1}}{c_n}=3$ ב. (2) הוכחה.

3) א. $p=0.5$ ב. 0.441.   ג. $\frac{7}{30}$.

4) א. הוכחה.   ב. הוכחה.   ג. הוכחה.   ד. 6.

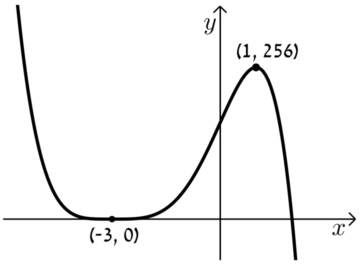
5) א. הוכחות.   ב. הוכחה.   ג. $BC=73.376$, $\alpha=100.844^\circ$.

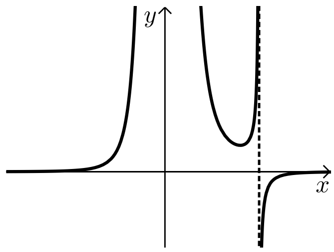
6) א. (1) $(-3,0)$, $(2,0)$, $(0,162)$ א. (2) $\max(1,256)$, $\min(-3,0)$

א. (3) סקיצה בצד.   ב. (1) $x\neq 5$, $x\neq 0$ ב. (2) לא חותכת.

ב. (3) עולה: $x>5$, $4<x<5$, $x<0$, יורדת: $0<x<4$

ב. (4) להלן סקיצה: ג. הוכחות.





7) א. (1) עבור: $a>0$: $x\geq\sqrt{a}$, $x\leq-\sqrt{a}$, ועבור: $a<0$: $x\neq 0$.

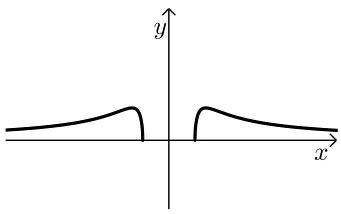
א. (2) עבור: $a>0$: $(\sqrt{a},0)$, $(-\sqrt{a},0)$, ועבור: $a<0$: אין.

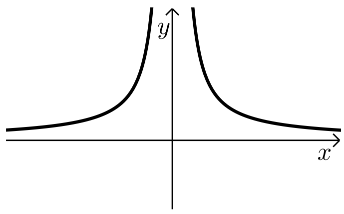
א. (3) הוכחה.   א. (4) עבור $a>0$: $y=0$, ועבור $a<0$: $y=0$, $x=0$.

א. (5) עבור: $a>0$: עולה: $\sqrt{a}<x<\sqrt{2a}$, $x<-\sqrt{2a}$, יורדת: $x>\sqrt{2a}$, $-\sqrt{2a}<x<-\sqrt{a}$

עבור: $a<0$: עולה: $x<0$, יורדת: $x>0$.

ב. סקיצה עבור: $a>0$:   סקיצה עבור: $a<0$:   ג. $0<a\leq\frac{1}{4}$, $a<0$.





8) א. (1) הוכחה.   א. (2) $x=60^\circ$ ב. 2.